Principe de récurrence et variantes

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

• **Principe de récurrence:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\right) \end{cases}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Vocabulaire:

★ Vérifier $\mathcal{P}(n_0)$ constitue l'**initialisation** du raisonnement par récurrence.

★ Une propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est dite **héréditaire**.

Attention: Une propriété peut être héréditaire et par ailleurs, fausse! L'étape d'initialisation est donc indispensable pour conclure.

★ Symboliquement, le principe s'écrit:

$$\boxed{[\mathcal{P}(n_0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \mathcal{P}(n)].}$$

• **Récurrence double:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)\right) \end{cases}$ alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque: Ce type de récurrence s'utilise lorsque la démonstration de l'hérédité nécessite l'utilisation des deux rangs précédents.

• **Récurrence forte:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \ldots \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\right) \end{cases}$

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque: Ce type de récurrence s'utilise lorsque la démonstration de l'hérédité nécessite l'utilisation de certains rangs compris entre n_0 et n ou même de tous.
Une récurrence forte peut évidemment remplacer une récurrence double.

• **Récurrence finie:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \in [\![n_0, p-1]\!], \text{si } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie, alors } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie} \end{cases}$

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n, $n_0 \leq n \leq p$

Remarque: ce type de récurrence s'utilise lorsque la propriété à démontrer n'a plus de sens à partir du rang p+1.

Exercices

① Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

② Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

③ Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, une application injective.
Montrer que si $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(n) \leq n$ alors $f = Id_{\mathbb{N}}$.

④ Soit f: $\begin{cases} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^* \\ (p,q) \mapsto 2^p(2q+1) \end{cases}$. Montrer que f est surjective.

⑤ On donne les deux propriétés suivantes où $n\in\mathbb{N}^*$:

P(n): $\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)!-1$ et Q(n): $\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)!$

a. Montrer que ces deux propriétés sont héréditaires pour tout $n\geq 1$.
b. Laquelle des deux est vraie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$?

⑥ Montrer que si une trousse contient n stylos alors ils sont tous de la même couleur.


....

Réponse: Soit P(n): Si une trousse contient n stylos alors il sont tous de le même couleur.

★ P(1) est trivialement vraie.

★ Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, tel que P(n) est vraie. Considérons une trousse contenant (n+1) stylos. On enlève un stylo, la trousse contient alors n stylos tous de la même couleur par hypothèse de récurrence. Remettons le stylo et enlevons en un autre. les n stylos restants sont encore de la même couleur. Ainsi les (n+1) stylos sont de la même couleur et P(n+1) est vraie

★ D'après le principe de récurrence, $\forall n\geq 1$, si une trousse contient n stylos alors ils sont tous de la même couleur.

Qu'en pensez-vous ?